Géométrie

Les Angles

Angles inscrits, angles au centre et quadrilatères cycliques

Partie 2 — Cours complet

TerangaMath

*

Introduction

Cette deuxième partie aborde le **cœur de la chasse aux angles en compétition** : les relations angulaires dans le cercle.

Si la Partie 1 a établi les fondations (parallèles, triangles, isocèles), cette partie introduit les outils les plus fréquemment utilisés dans les problèmes olympiques :

1. **L'angle inscrit et l'angle au centre**
2. **Le quadrilatère cyclique**
3. **L'angle tangentiel**
4. **Les configurations classiques**

☞ **Remarque**

Selon Evan Chen, la majorité des problèmes de géométrie olympique de niveau intermédiaire peuvent être résolus en combinant judicieusement les angles inscrits et les quadrilatères cycliques.

Partie 1 : angles et parallèles, somme des angles d'un triangle, triangle isocèle, angle droit et cercle.

Partie 2

Angle au centre et angle inscrit

1. Angle au centre et angle inscrit

1.1 Définitions fondamentales

Problème d'ouverture

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Deux points A et B sont sur le cercle. Un troisième point M est également sur le cercle.
On mesure l'angle $\widehat{AOB} = 80°$ (angle au centre).
Que vaut l'angle $\widehat{AMB}$ (angle inscrit) ?
Et si M se déplace sur le cercle (en restant du même côté de la corde $[AB]$), l'angle $\widehat{AMB}$ change-t-il ?

▷ Définition 1.1 Angle inscrit

Un **angle inscrit** est un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux autres points.

▷ Définition 1.2 Angle au centre

Un **angle au centre** est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

▷ Définition 1.3 Arc intercepté

L'**arc intercepté** par un angle inscrit ou au centre est l'arc situé à l'intérieur de l'angle.

1.2 Le théorème fondamental

★ Théorème 1.1 — Angle inscrit et angle au centre

Un angle inscrit est égal à la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

$$\boxed{\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}}$$

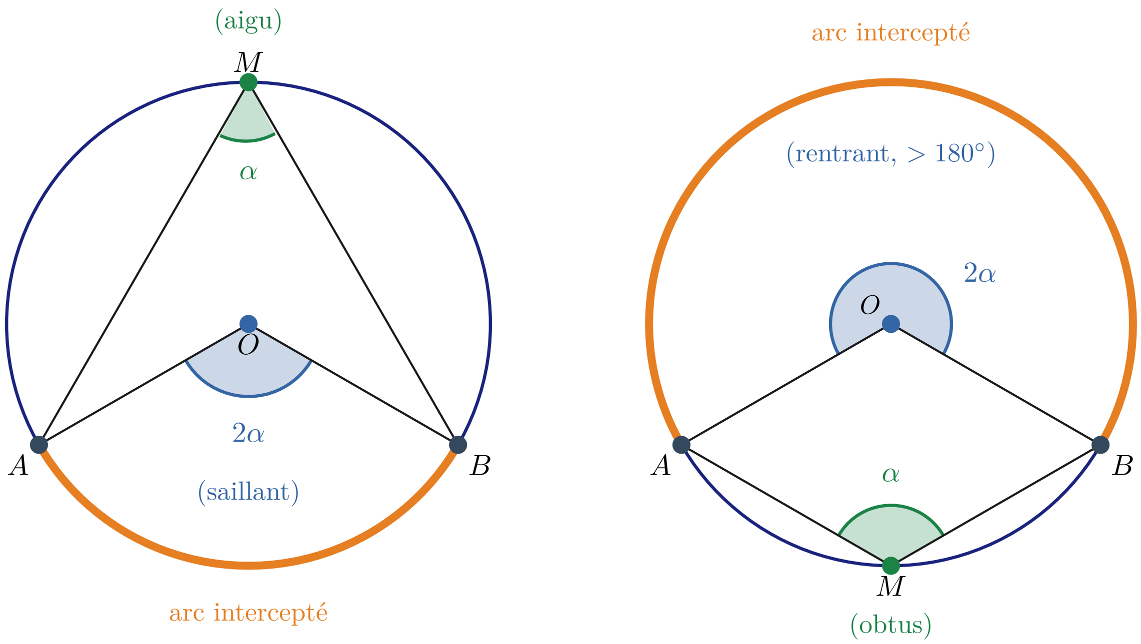
où O est le centre du cercle et M est un point du cercle distinct de A et B.

☞ Remarque

Il existe deux situations :

- L'angle inscrit est **aigu** et l'angle au centre est **saillant** ($< 180°$)
- L'angle inscrit est **obtus** et l'angle au centre est **rentrant** ($> 180°$)

De plus, le centre O peut être **intérieur** ou **extérieur** à l'angle inscrit.



Cas 1 : L'angle inscrit est aigu **Cas 2 : L'angle inscrit est obtus**

Figure 1 : Angle au centre et angle inscrit interceptant le même arc

Démonstration. Nous distinguons trois cas selon la position de M par rapport au diamètre.

Cas 1 : Le centre O est sur un côté de l'angle inscrit

Supposons que O est sur $[MA)$ (c'est-à-dire M, O, A alignés avec $[MA]$ diamètre).

Le triangle OMB est isocèle en O (car $OM = OB =$ rayon). Donc $\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$. Notons cet angle β.

L'angle $\widehat{MOB}$ est un angle extérieur du triangle OMB au sommet O.

Par le théorème de l'angle extérieur : $\widehat{AOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\beta$.

Or $\widehat{AMB} = \widehat{OMB} = \beta$, donc $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Cas 2 : Le centre O est à l'intérieur de l'angle inscrit

Traçons le diamètre $[MC]$ passant par M. Par le Cas 1 appliqué aux angles $\widehat{AMC}$ et $\widehat{BMC}$:

$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{BMC} = \frac{1}{2}(\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Cas 3 : Le centre O est à l'extérieur de l'angle inscrit

Même méthode avec le diamètre $[MC]$, mais par soustraction :

$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} - \widehat{BMC} = \frac{1}{2}(\widehat{AOC} - \widehat{BOC}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. □

1.3 Retour au problème d'ouverture

Si $\widehat{AOB} = 80°$, alors par le théorème 1.1 :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times 80° = \boxed{40°}$$

Et si M se déplace sur le cercle (du même côté de $[AB]$) ? L'angle au centre $\widehat{AOB}$ ne change pas. Donc l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ reste constant et vaut toujours 40°.

★ **À retenir :** Tous les points M situés sur le même arc voient le segment $[AB]$ sous le même angle !

2. Propriétés des angles inscrits

Problème d'ouverture

Sur un cercle, on place quatre points A, B, M, N (dans cet ordre).
On sait que $\widehat{AMB} = 35°$.
Que vaut $\widehat{ANB}$?

2.1 Angles inscrits interceptant le même arc

✓ Propriété 2.1 — Égalité des angles inscrits

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.

Démonstration. Soit $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ deux angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

Par le théorème 1.1 : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ et $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Donc $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$. □

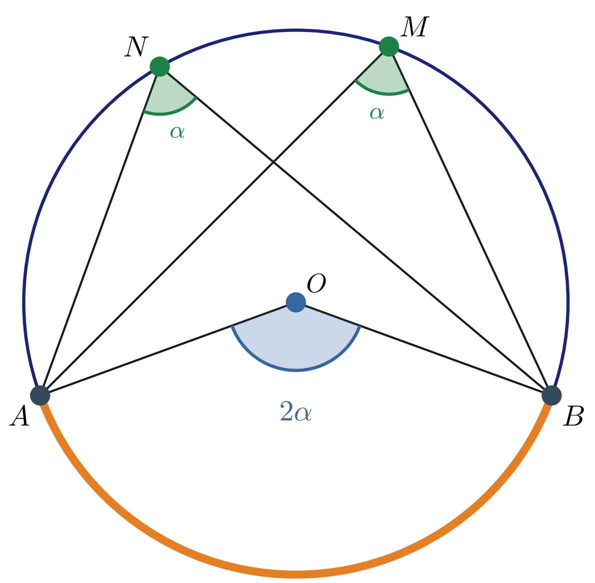


Figure 2 : Deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux

2.2 Retour au problème d'ouverture

Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent tous deux l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (l'arc qui ne contient ni M ni N).

Par la propriété 2.1 : $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = \boxed{35^\circ}$.

2.3 Cas particulier : angle inscrit dans un demi-cercle

★ Théorème 2.2 — Angle inscrit et diamètre

Si $[AB]$ est un diamètre du cercle, alors tout angle inscrit $\widehat{AMB}$ (avec M sur le cercle, $M \neq A, B$) est un angle droit.

$$[AB] \text{ diamètre} \implies \widehat{AMB} = 90^\circ$$

Réciproque : Si $\widehat{AMB} = 90^\circ$, alors M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration. Si $[AB]$ est un diamètre, l'angle au centre $\widehat{AOB} = 180^\circ$ (angle plat).

Par le théorème 1.1 : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$. □

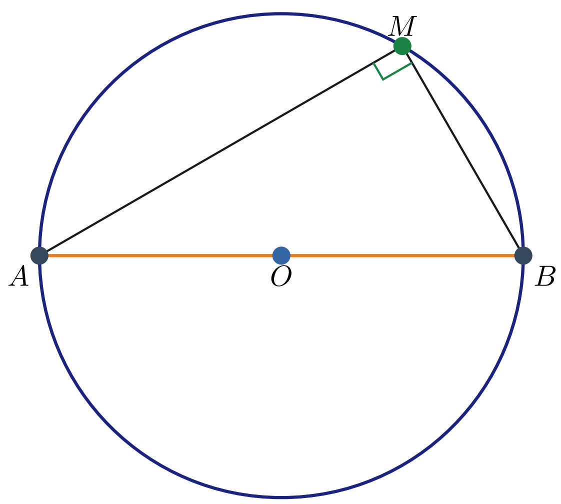


Figure 3 : Angle inscrit dans un demi-cercle

☞ Remarque

C'est exactement le théorème 5.1 de la Partie 1 ! Nous venons de le redémontrer comme cas particulier du théorème de l'angle inscrit.

3. Quadrilatères cycliques

Problème d'ouverture

Un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. On sait que $\widehat{DAB} = 75°$.
Que vaut l'angle $\widehat{BCD}$?
Inversement, si dans un quadrilatère $EFGH$, on a $\widehat{E}+\widehat{G} = 180°$, peut-on affirmer que $EFGH$ est inscriptible dans un cercle ?

3.1 Définition

▷ Définition 3.1 — Quadrilatère cyclique

Un quadrilatère est dit **cyclique** (ou **inscriptible**) s'il existe un cercle passant par ses quatre sommets.
Ce cercle est appelé **cercle circonscrit** au quadrilatère.

3.2 Le théorème fondamental

★ Théorème 3.1 — Angles opposés d'un quadrilatère cyclique

Dans un quadrilatère cyclique, les angles opposés sont **supplémentaires**.

$$\boxed{\widehat{A}+\widehat{C} = 180° \quad \text{et} \quad \widehat{B}+\widehat{D} = 180°}$$

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O.

L'angle $\widehat{DAB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $B\overset{\frown}{C}D$ (l'arc qui ne contient pas A).

L'angle $\widehat{BCD}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $B\overset{\frown}{A}D$ (l'arc qui ne contient pas C).

Or les arcs $B\overset{\frown}{C}D$ et $B\overset{\frown}{A}D$ forment ensemble le cercle entier.

Leurs angles au centre correspondants ont pour somme $360°$.

Donc : $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \times 360° = 180°$. □

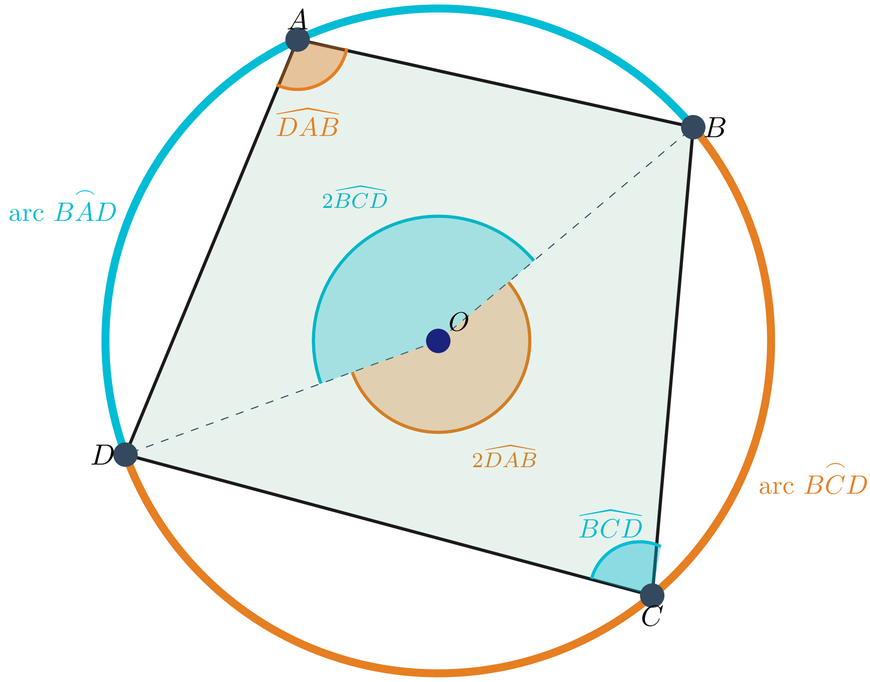


Figure 4 : Angles opposés d'un quadrilatère cyclique

3.3 La réciproque : critère de cocyclicité

★ Théorème 3.2 — Réciproque (Critère de cocyclicité)

Si dans un quadrilatère $ABCD$, les angles opposés sont supplémentaires :

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$$

alors le quadrilatère est inscriptible dans un cercle.

Démonstration. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$.

Considérons le cercle $\mathcal{C}$ passant par les trois points A, B et D (trois points non alignés déterminent un unique cercle).

Soit C' le point d'intersection de ce cercle avec la demi-droite $[BC)$ située du même côté de (BD) que C.

Le quadrilatère $ABC'D$ est inscrit dans $\mathcal{C}$. Par le théorème 3.1 (sens direct), ses angles opposés sont supplémentaires :

$$\widehat{DAB} + \widehat{BC'D} = 180°$$

Or, par hypothèse :

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180°$$

En comparant ces deux égalités, on obtient :

$$\widehat{BC'D} = \widehat{BCD}$$

Les points C et C' sont sur la même demi-droite $[BC)$ et l'angle $\widehat{BC'D} = \widehat{BCD}$.

Si $C \neq C'$, les droites $(C'D)$ et (CD) formeraient le même angle avec (BC), donc seraient parallèles. Mais elles passent toutes deux par D, ce qui est impossible pour deux droites parallèles distinctes.

Donc $C = C'$, et C appartient au cercle $\mathcal{C}$. Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible. □

⊙ *Analyse du raisonnement*

Application stratégique : cette réciproque est fondamentale en compétition. Elle permet de :

- **Prouver que 4 points sont cocycliques** en montrant que deux angles opposés sont supplémentaires
- **Créer de nouveaux cercles** dans une figure, ouvrant de nouvelles possibilités d'angles inscrits

☛ Attention

Il faut vérifier que ce sont bien les angles *opposés* qui sont supplémentaires, pas les angles adjacents !

3.4 Retour au problème d'ouverture

Si $ABCD$ est inscrit et $\widehat{DAB} = 75°$, alors par le théorème 3.1 :

$$\widehat{BCD} = 180° - 75° = \boxed{105°}$$

Si $\widehat{E} + \widehat{G} = 180°$ dans le quadrilatère $EFGH$, alors par le théorème 3.2 (réciproque), le quadrilatère $EFGH$ est inscriptible dans un cercle.

3.5 Autre critère de cocyclicité

★ Théorème 3.3 — Critère par angles égaux

Quatre points A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si :

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$$

(les deux angles interceptent le segment $[CD]$ et sont situés du même côté de la droite (CD)).

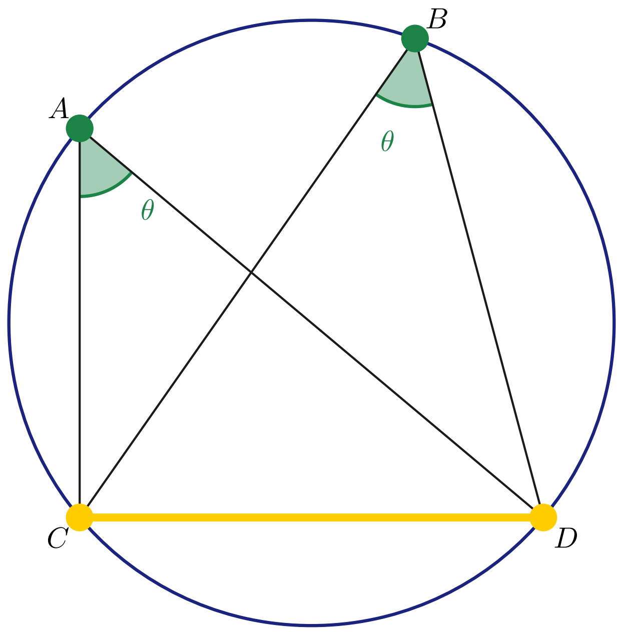


Figure 5 : Critère de cocyclicité — angles égaux interceptant le même segment

☞ Remarque

Ce critère est souvent plus pratique que le critère des angles opposés supplémentaires, car il ne nécessite pas de connaître les quatre angles du quadrilatère.

4. Angle tangentiel

Problème d'ouverture

Une droite t est tangente à un cercle $\mathcal{C}$ en un point A. Un point B est sur le cercle, et un point M est sur le cercle (distinct de A et B).
Quelle relation existe-t-il entre l'angle $\widehat{BAT}$ (formé par la corde et la tangente) et l'angle

inscrit $\widehat{AMB}$?

4.1 Définition

▷ Définition 4.1 — Angle tangentiel

Un **angle tangentiel** est l'angle formé par une tangente à un cercle et une corde issue du point de tangence.

4.2 Le théorème de l'angle tangentiel

★ Théorème 4.1 — Angle tangentiel

L'angle formé par une tangente et une corde est égal à l'angle inscrit qui intercepte le même arc.
Si (AT) est tangente au cercle en A, et B est un autre point du cercle :

$$\boxed{\widehat{TAB} = \widehat{AMB}}$$

pour tout point M sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ situé du côté opposé à T par rapport à la corde (AB).

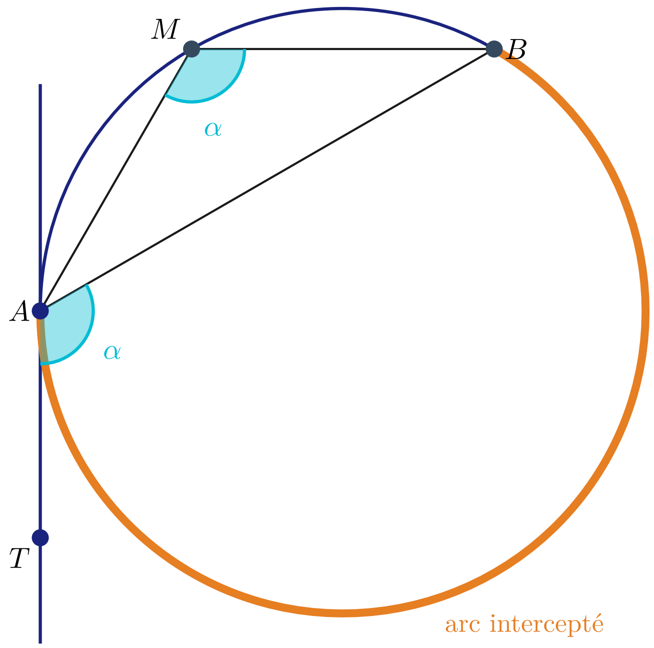


Figure 6 : Angle tangentiel $\widehat{TAB}$ égal à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$

⊙ ***Analyse du raisonnement***

Utilité de l'angle tangentiel : Ce théorème permet de « remplacer » un point du cercle par la tangente, ou inversement. C'est utile quand :

- On a une tangente dans le problème et on veut la relier aux angles inscrits
- On cherche à prouver qu'une droite est tangente (en montrant l'égalité avec un angle inscrit, la réciproque du théorème est vraie)

5. Résumé mnémotechnique

✔ **Résumé : « Je vois... Je pense... »**

Je vois...	**Je pense...**
Un angle inscrit et l'angle au centre correspondant	Angle inscrit $= \frac{1}{2}$ angle au centre
Deux angles inscrits sur le même arc	Ils sont égaux
Un angle inscrit dans un demi-cercle	C'est un angle droit (90°)
Un quadrilatère inscrit	Angles opposés supplémentaires (180°)
Deux angles supplémentaires opposés	Le quadrilatère est inscriptible
Deux angles égaux voyant le même segment	Les 4 points sont cocycliques
Une tangente et une corde	Angle tangentiel = angle inscrit
Un angle droit $\widehat{AMB} = 90°$	M est sur le cercle de diamètre $[AB]$
Quatre points à montrer cocycliques	Chercher angles égaux ou supplémentaires

☞ **Remarque**

La question clé en compétition : face à un problème avec un cercle :

1. Quels angles inscrits puis-je identifier ?

2. Y a-t-il des quadrilatères cycliques (évidents ou à démontrer) ?
3. Puis-je créer de nouveaux cercles (via des angles droits ou des cocyclicités) ?

6. Exercices

✎ Exercice 1

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O. On a $\widehat{BAC} = 40°$.

(a) Calculer $\widehat{BOC}$.

(b) Si M est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (ne contenant pas A), calculer $\widehat{BAM}$ et $\widehat{CAM}$.

✎ Exercice 2

Dans un cercle, on inscrit un quadrilatère $ABCD$ tel que $\widehat{ABC} = 110°$ et $\widehat{BCD} = 70°$. Calculer les angles $\widehat{CDA}$ et $\widehat{DAB}$.

✎ Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$.

(a) Pourquoi A est-il sur $\mathcal{C}$?

(b) La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H. Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{BCA}$.

✎ Exercice 4 — ⋆

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en P.
Montrer que les triangles ABP et DCP sont semblables.

✎ Exercice 5 — ⋆

Une tangente au cercle $\mathcal{C}$ en un point A coupe la droite (BC) en un point T, où B et C sont sur $\mathcal{C}$.
Montrer que $TA^2 = TB \cdot TC$.
Indication : Utiliser l'angle tangentiel et la similitude de triangles.

✎ Exercice 6 — ⋆⋆

Soit ABC un triangle et ω son cercle circonscrit. La tangente à ω en A coupe (BC) en D.
Montrer que $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ si et seulement si $AB = AC$.
Source : Olympiade Suisse de Mathématiques

✎ Exercice 7 — ⋆⋆

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On note P l'intersection de (AB) et (CD), et Q l'intersection de (AD) et (BC).
Montrer que les cercles circonscrits aux triangles PAD et PBC se coupent sur la droite (PQ).
Source : Configuration classique (point de Miquel)

Sources et références

1. **Evan Chen**, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (EGMO)*, MAA Press, 2016.
2. **Daniel Sprecher**, *Geometry I — Angle Chasing*, Olympiade Suisse de Mathématiques.
3. **N. Radu**, *Angles et cercles*, Mathtraining.be, 2014.
4. **Yufei Zhao**, *Cyclic Quadrilaterals — The Big Picture*, yufeizhao.com/olympiad
5. **Art of Problem Solving**, *Inscribed angle* et *Cyclic quadrilateral*.

Dans la Partie 3, nous aborderons les angles orientés, qui permettent de gérer élégamment les cas de figure et d'unifier les énoncés.