Géométrie

Les Angles

Fondements de la chasse aux angles

Préparation aux

Olympiades Mathématiques

Partie 1 — Cours complet

TerangaMath

Année 2025-2026

*

Introduction

La **chasse aux angles** (*angle chasing* en anglais) est une technique fondamentale en géométrie olympique. Elle consiste à exprimer systématiquement tous les angles d'une figure en fonction d'un petit nombre de variables, puis à exploiter les relations obtenues pour résoudre le problème.

Cette technique est omniprésente : selon Evan Chen, auteur du manuel de référence *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, plus de 50% des problèmes de géométrie olympique utilisent la chasse aux angles comme étape intermédiaire.

Cette première partie présente les outils de base que vous utiliserez dans presque tous les problèmes de géométrie. Ces résultats doivent devenir des **automatismes**.

Prérequis

Aucun prérequis spécifique n'est nécessaire pour aborder cette partie. Une familiarité avec les notions de droite, segment et mesure d'angle est toutefois utile.

Plan de cette partie

1. Rappels sur les angles
2. Angles et droites parallèles
3. Angles dans un triangle
4. Triangle isocèle et triangle équilatéral
5. Angle droit et cercle
6. Méthode : démarrer une chasse aux angles
7. Résumé mnémotechnique
8. Exercices

Partie 1

1. Rappels sur les angles

1.1 Notation des angles

Définition 1.1 — Angle

Un angle est défini par trois points : le **sommet** et deux points situés sur chacun des côtés de l'angle.
L'angle de sommet B formé par les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ se note $\widehat{B}$ ou $\widehat{ABC}$ (le sommet est toujours au milieu).
La mesure de cet angle s'exprime en **degrés**.

Remarque

Dans ce cours, sauf mention contraire, tous les angles considérés sont des **angles géométriques**, c'est-à-dire compris entre $0°$ et $180°$. Les angles orientés seront introduits dans une partie ultérieure.

1.2 Angles particuliers

Définition 1.2 — Angles particuliers

- **Angle nul :** angle de mesure $0°$.
- **Angle aigu :** angle de mesure strictement comprise entre $0°$ et $90°$.
- **Angle droit :** angle de mesure $90°$.
- **Angle obtus :** angle de mesure strictement comprise entre $90°$ et $180°$.
- **Angle plat :** angle de mesure $180°$.

Définition 1.3 — Relations entre angles

- **Angles complémentaires :** deux angles dont la somme des mesures vaut $90°$.
- **Angles supplémentaires :** deux angles dont la somme des mesures vaut $180°$.
- **Angles adjacents :** deux angles qui ont le même sommet, un côté commun, et sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

1.3 Angles opposés par le sommet

Problème d'ouverture

Deux droites (d_1) et (d_2) se coupent en un point O. Elles forment quatre angles.
Que peut-on dire des angles non adjacents ?

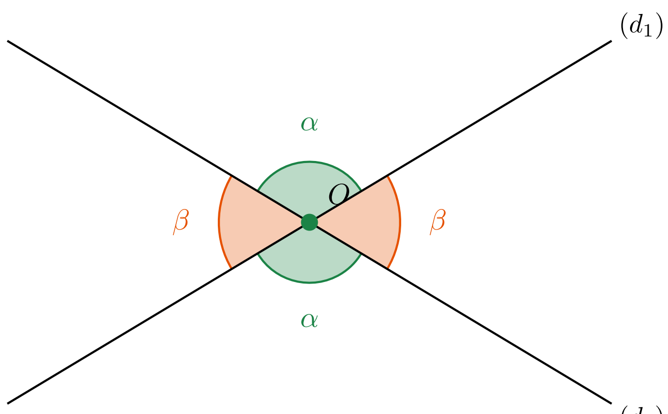

Figure 1 : Angles opposés par le sommet

Propriété 1.1 — Angles opposés par le sommet

Lorsque deux droites se coupent, les **angles opposés par le sommet** sont égaux.

Démonstration. Soient α et β deux angles adjacents formés par les deux droites. Comme ils forment ensemble un angle plat, on a :

$$\alpha + \beta = 180°$$

L'angle opposé à α est également adjacent à β. Notons-le α'. On a donc aussi :

$$\alpha' + \beta = 180°$$

Par conséquent, $\alpha' = \alpha$. Les angles opposés par le sommet sont égaux. □

2. Angles et droites parallèles

Problème d'ouverture

Deux droites parallèles (d_1) et (d_2) sont coupées par une sécante (Δ). On sait qu'un des huit angles formés mesure $65°$.
Peut-on déterminer la mesure des sept autres angles ?

2.1 Les différents types d'angles

Lorsqu'une droite (Δ), appelée **sécante**, coupe deux droites (d_1) et (d_2), elle forme huit angles. On distingue plusieurs types d'angles selon leur position.

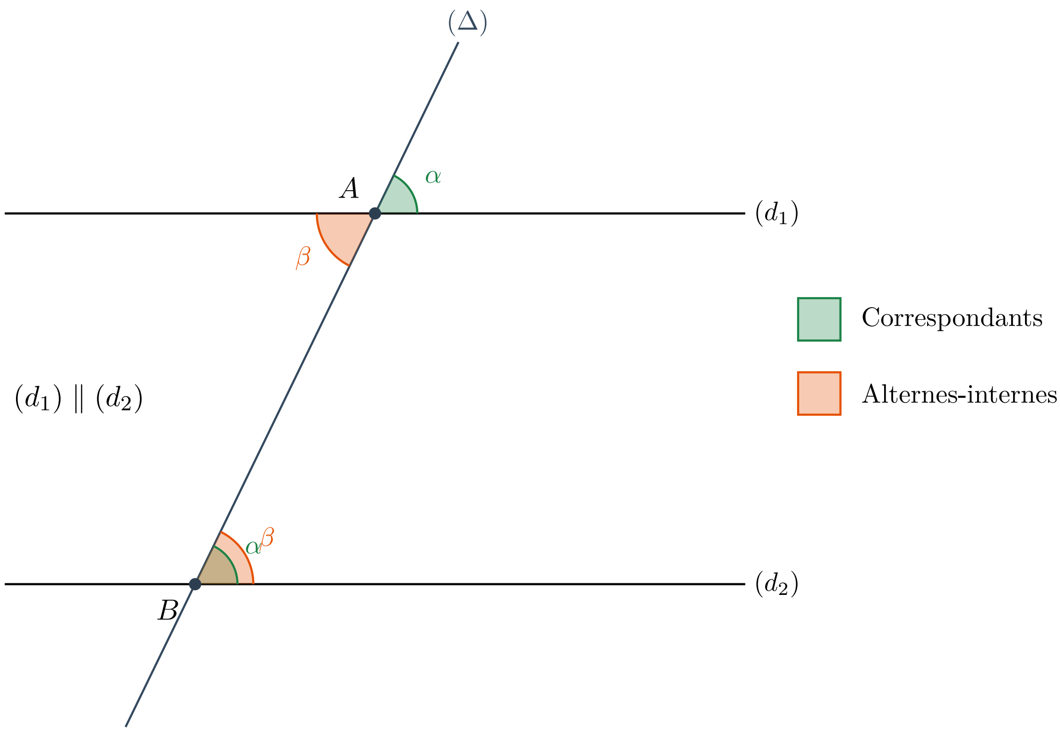

Figure 2 : Angles formés par une sécante coupant deux parallèles

Définition 2.1 — Angles formés par une sécante

- **Angles correspondants :** angles situés du même côté de la sécante et dans la même position par rapport à chaque droite.
- **Angles alternes-internes :** angles situés de part et d'autre de la sécante, entre les deux droites.

2.2 Propriétés fondamentales

Propriété 2.1 — Angles et droites parallèles

Si deux droites sont parallèles, alors toute sécante forme avec elles :

(i) des angles **correspondants égaux** ;

(ii) des angles **alternes-internes égaux**.

Analyse du raisonnement

Conséquence pratique : Les huit angles ne prennent que **deux valeurs** : si l'une est α, les autres valent soit α, soit $180° - \alpha$.

Propriété 2.2 — Réciproque (Critère de parallélisme)

Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux (ou des angles correspondants égaux), alors ces deux droites sont **parallèles**.

Remarque

Cette réciproque est très utile pour démontrer qu'une droite est parallèle à une autre.

Retour au problème d'ouverture

Si un angle vaut 65°, alors par la propriété 2.1 :

— quatre angles valent 65° (angles correspondants et alternes) ;

— quatre angles valent $180° - 65° = 115°$ (angles supplémentaires).

3. Angles dans un triangle

Problème d'ouverture

Dans un triangle ABC, on connaît deux angles : $\widehat{ABC} = 70°$ et $\widehat{BCA} = 60°$.

(a) Que vaut l'angle $\widehat{BAC}$?

(b) On prolonge le côté $[BC]$ au-delà de C en un point D. Que vaut l'angle $\widehat{ACD}$?

3.1 Somme des angles d'un triangle

Propriété 3.1 — Somme des angles d'un triangle

Dans tout triangle, la somme des mesures des angles intérieurs est égale à 180°.

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$$

Démonstration. Soit ABC un triangle. Traçons par A la parallèle (d) à la droite (BC).

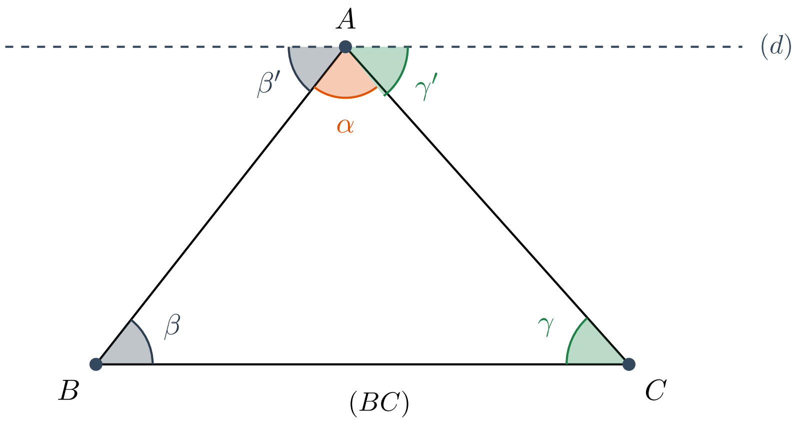

Figure 3 : Démonstration de la somme des angles — parallèle par A

Au point A, trois angles sont formés sur la droite (d) : β', α, γ' (de gauche à droite).

Ces trois angles forment un angle plat, donc : $\beta' + \alpha + \gamma' = 180°$.

Or, par la propriété 2.1 (angles alternes-internes) :
- $\beta' = \widehat{ABC}$ (avec (AB) comme sécante entre (d) et (BC)) ;
- $\gamma' = \widehat{BCA}$ (avec (AC) comme sécante entre (d) et (BC)).

Donc : $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180°$. □

Analyse du raisonnement

Technique à retenir : pour relier des angles situés en des points différents, on peut tracer une parallèle et utiliser les angles alternes-internes comme « pont ».

3.2 Angle extérieur d'un triangle

Définition 3.1 — Angle extérieur

Un **angle extérieur** d'un triangle est un angle formé par un côté du triangle et le prolongement d'un autre côté.

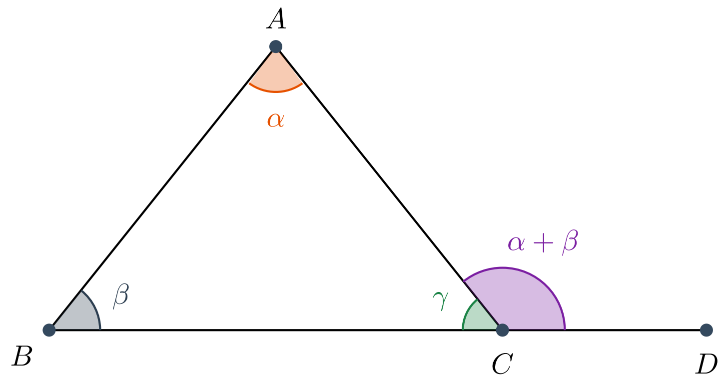

Figure 4 : Angle extérieur d'un triangle

Propriété 3.2 — Angle extérieur d'un triangle

Un angle extérieur d'un triangle est égal à la **somme des deux angles intérieurs non adjacents**.
Si D est un point du prolongement de $[BC]$ au-delà de C :

$$\widehat{ACD} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$$

Démonstration. L'angle extérieur $\widehat{ACD}$ et l'angle intérieur $\widehat{BCA}$ sont supplémentaires :

$$\widehat{ACD} + \widehat{BCA} = 180°$$

Or, par la propriété 3.1 : $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$.

Par conséquent : $\widehat{ACD} = 180° - \widehat{BCA} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$. □

Remarque

L'angle extérieur est strictement supérieur à chacun des deux angles intérieurs non adjacents. Cette inégalité est parfois utile dans les problèmes d'existence.

Retour au problème d'ouverture

(a) Par la propriété 3.1 : $\widehat{BAC} = 180° - 70° - 60° = \boxed{50°}$.
(b) Par la propriété 3.2 : $\widehat{ACD} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 50° + 70° = \boxed{120°}$.

4. Triangle isocèle et triangle équilatéral

Le triangle isocèle est un outil fondamental en chasse aux angles car il permet de passer des **égalités de longueurs** aux **égalités d'angles**, et réciproquement.

Problème d'ouverture

Dans un triangle ABC, on sait que $AB = AC$ et que l'angle $\widehat{BAC} = 40°$.
Que valent les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$?

4.1 Triangle isocèle

Définition 4.1 — Triangle isocèle

Un **triangle isocèle** est un triangle qui possède (au moins) deux côtés de même longueur.
Le sommet opposé au troisième côté est appelé **sommet principal**, et le troisième côté est appelé **base**.

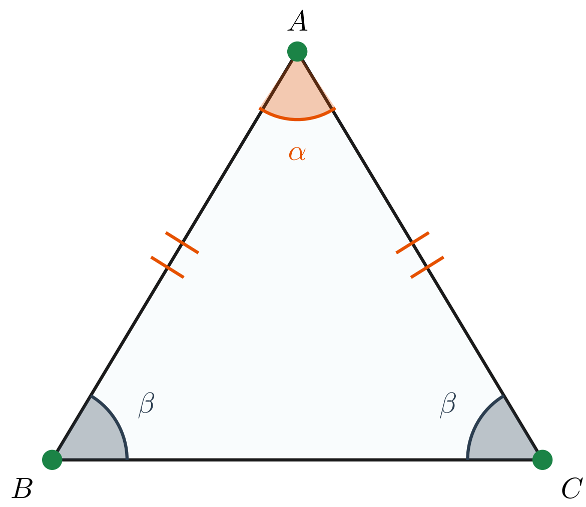

Figure 5 : Triangle isocèle — les angles de la base sont égaux

Théorème 4.1 — Caractérisation du triangle isocèle

Un triangle a deux côtés égaux **si et seulement si** les angles opposés à ces côtés sont égaux.

$$AB = AC \iff \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont appelés **angles de la base**.

Analyse du raisonnement

Double implication : Ce théorème fonctionne dans les deux sens. C'est ce qui rend le triangle isocèle si puissant :

- Si vous voyez **deux côtés égaux** $\longrightarrow$ vous pouvez affirmer que les angles opposés sont égaux.
- Si vous trouvez **deux angles égaux** $\longrightarrow$ vous pouvez affirmer que les côtés opposés sont égaux.

Retour au problème d'ouverture

Puisque $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A. Par la propriété 4.1, les angles de la base sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Notons cette valeur commune β.

Par la propriété 3.1 : $40° + \beta + \beta = 180°$, soit $2\beta = 140°$, donc $\beta = 70°$.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ valent chacun $\boxed{70°}$.

4.2 Triangle équilatéral

Définition 4.2 — Triangle équilatéral

Un **triangle équilatéral** est un triangle dont les trois côtés ont la même longueur.

Propriété 4.1 — Caractérisation du triangle équilatéral

Un triangle est équilatéral **si et seulement si** ses trois angles sont égaux à 60°.

Démonstration. Si les trois côtés sont égaux, alors le triangle est isocèle de trois façons différentes. Par le théorème 4.1, les trois angles sont donc égaux. Comme leur somme vaut 180° (propriété 3.1), chacun vaut 60°.

Réciproquement, si les trois angles sont égaux, alors par la réciproque du théorème 4.1, les trois côtés sont égaux. □

5. Angle droit et cercle

Ce dernier résultat établit un lien fondamental entre les angles droits et les cercles. Il servira de transition vers la partie suivante sur les angles inscrits.

Problème d'ouverture

Soit M un point tel que $MA = MB = MC$.

(a) Que représente le point M pour le triangle ABC ?

(b) Si de plus A, B, C sont alignés, que peut-on dire de M ?

5.1 Le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle

Théorème 5.1 — Angle inscrit dans un demi-cercle

Soit $[AB]$ le diamètre d'un cercle de centre O et M un point du cercle distinct de A et B. Alors l'angle $\widehat{AMB}$ est droit :

$$\widehat{AMB} = 90°$$

Démonstration.

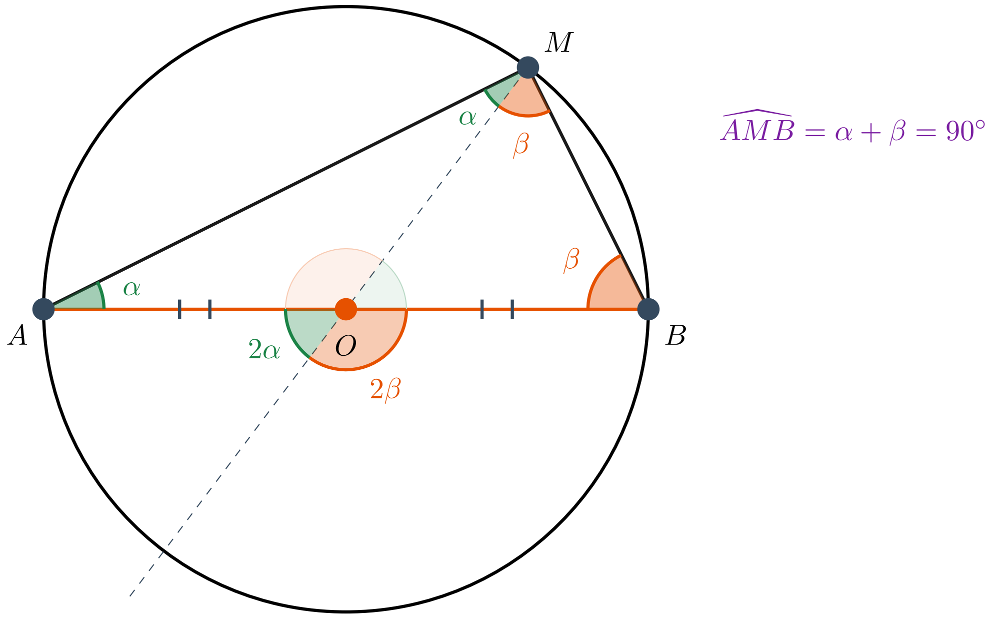

Figure 6 : Angle inscrit dans un demi-cercle

Soit O le centre du cercle, milieu de $[AB]$. Alors $OA = OM = OB$ (rayons du cercle).

Le triangle OAM est isocèle en O, donc $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$. Notons cet angle α.

Le triangle OMB est isocèle en O, donc $\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$. Notons cet angle β.

Dans le triangle AMB, la somme des angles donne :

$$\widehat{OAM} + \widehat{AMB} + \widehat{OBM} = \alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180°$$

Donc $2\alpha + 2\beta = 180°$, soit $\alpha + \beta = 90°$.

Or $\widehat{AMB} = \widehat{OMA} + \widehat{OMB} = \alpha + \beta = 90°$.

Une variante de la démonstration (esquissée sur le schéma ci-dessus) utilise le résultat sur la somme des angles pour les triangles OAM et OMB. $\square$

Théorème 5.2 — Réciproque

Si $\widehat{AMB} = 90°$, alors M est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Remarque

Cette réciproque permet de montrer que des points sont **cocycliques** (situés sur un même cercle) en utilisant des angles droits.

6. Méthode : démarrer une chasse aux angles

Voici une démarche systématique pour aborder un problème de géométrie impliquant des angles.

Étape 1 : Faire une figure claire

Faites une grande figure, dans le cas général. Si le problème parle d'un triangle ABC quelconque, ne le dessinez pas isocèle ou rectangle par hasard — cela pourrait vous induire en erreur.

Étape 2 : Introduire des notations

Nommez les angles clés avec des lettres grecques ou des variables. Dans un triangle ABC, on note souvent $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{BCA}$.

Étape 3 : Scanner la figure

Parcourez systématiquement la figure en cherchant :

- **des droites parallèles $\longrightarrow$ théorème 2.1 (angles correspondants, alternes-internes)**
- **des triangles $\longrightarrow$ théorème 3.1 (somme des angles $= 180°$)**
- **des côtés égaux $\longrightarrow$ théorème 4.1 (triangle isocèle, angles égaux)**
- **des angles droits $\longrightarrow$ théorème 5.2 (cercle de diamètre)**

Étape 4 : Propager l'information

Utilisez les relations trouvées pour exprimer de plus en plus d'angles en fonction de vos variables initiales. L'objectif est de réduire le nombre d'inconnues jusqu'à pouvoir conclure.

7. Résumé : « Je vois... Je pense... »

Ce tableau récapitule les réflexes à acquérir. À force de pratique, ces associations doivent devenir **automatiques**.

Résumé : « Je vois... Je pense... »

Je vois...	Je pense...
Deux droites qui se coupent	Angles opposés par le sommet égaux
Deux droites parallèles + sécante	Angles correspondants égaux, alternes-internes égaux
Un triangle	Somme des angles $= 180°$
Un angle extérieur à un triangle	Somme des deux angles intérieurs non adjacents
Deux côtés égaux dans un triangle	Triangle isocèle $\to$ angles opposés égaux
Deux angles égaux dans un triangle	Triangle isocèle $\to$ côtés opposés égaux
Trois côtés égaux	Triangle équilatéral $\to$ trois angles de $60°$
Un angle droit $\widehat{AMB}$	M est sur le cercle de diamètre $[AB]$
M sur un cercle de diamètre $[AB]$	Angle $\widehat{AMB} = 90°$
$MA = MB = MC$	M est le centre du cercle circonscrit à ABC

8. Exercices

Ces exercices utilisent uniquement les résultats de cette partie.

Exercice 1

Dans un triangle ABC, on a $\widehat{BAC} = 50°$ et $\widehat{ABC} = 65°$. Le point D est sur $[BC]$ tel que (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
Calculer les angles des triangles ABD et ACD.

Exercice 2

Deux droites parallèles sont coupées par deux sécantes qui se croisent entre les parallèles. L'une des sécantes forme un angle de $40°$ avec la première parallèle, l'autre forme un angle de $70°$.
Calculer l'angle entre les deux sécantes.

Exercice 3

Dans un triangle ABC, on a $AB = AC$. Le point D est sur $[AC]$ tel que $BD = BC$.
Si $\widehat{ABC} = 80°$, calculer $\widehat{BDC}$.
Indication : Identifier tous les triangles isocèles.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en C. Le point M est le milieu de l'hypoténuse $[AB]$.
Montrer que $MC = MA = MB$.
Indication : Utiliser le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 5 — ⋆

Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit P un point tel que $(PB) \perp (AB)$ et $PB = CB$, avec P du même côté de (AB) que C.
Montrer que (PC) est parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Source : Olympiade Suisse de Mathématiques

Exercice 6 — ⋆⋆

Dans un triangle ABC, les angles valent $\widehat{BAC} = 40°$, $\widehat{ABC} = 60°$, $\widehat{BCA} = 80°$. Le point D est intérieur au triangle, avec $\widehat{DBC} = 40°$ et $\widehat{DCB} = 30°$.
Calculer $\widehat{ADC}$.

9. Sources et références

Documents de référence

1. *Evan Chen*, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (EGMO), MAA Press, 2016.
2. *Daniel Sprecher*, Geometry I — Angle Chasing, Olympiade Suisse de Mathématiques.
3. *N. Radu*, Angles, Mathtraining.be, 2014.
4. *Cécile Gachet*, Pour débuter en géométrie : chasse aux angles et éléments de géométrie du triangle, Stages Olympiques Français.
5. *Yufei Zhao*, Math Olympiad Training Handouts, yufeizhao.com/olympiad.
6. *Bruce Merry*, Geometry for the Olympiad Enthusiast, South African Mathematical Society.

Ressources en ligne

— Art of Problem Solving : `artofproblemsolving.com/wiki`
— Cut-the-Knot : `cut-the-knot.org` (What is Angle Chasing ?)
— Blog Power Overwhelming : `blog.evanchen.cc`

♦ ♦ ♦

Dans la Partie 2, nous aborderons les angles inscrits, les angles au centre et les quadrilatères cycliques.